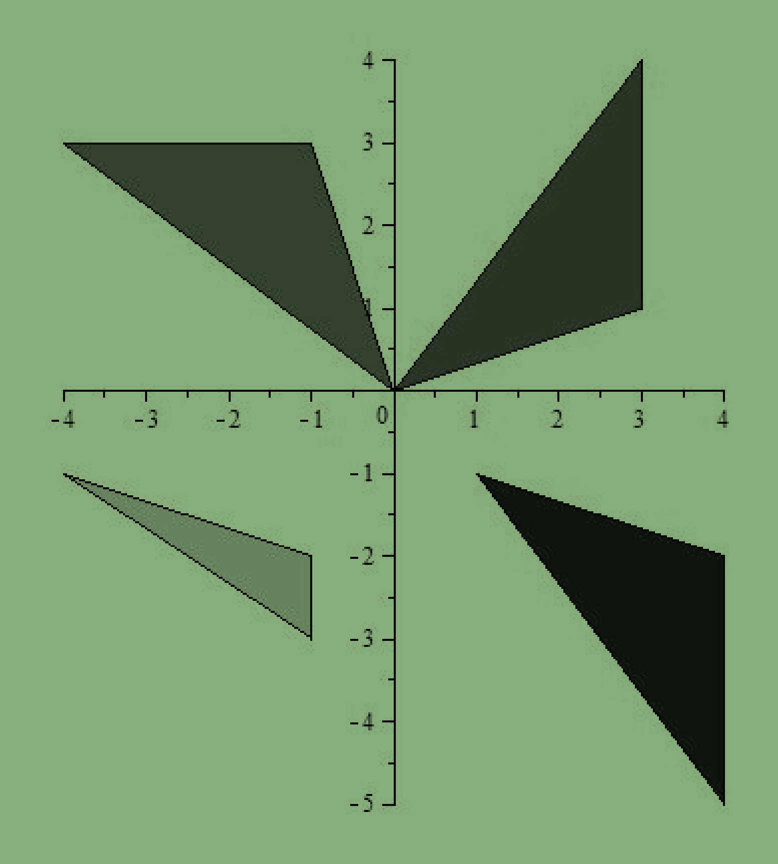
MOVIMIENTOS RÍGIDOS

por

SONIA LUISA RUEDA PÉREZ



CUADERNOS
DEL INSTITUTO
JUAN DE HERRERA
DE LA *ESCUELA DE*
ARQUITECTURA
DE MADRID

3-78-05

MOVIMIENTOS RÍGIDOS

por

SONIA LUISA RUEDA PÉREZ

CUADERNOS
DEL INSTITUTO
JUAN DE HERRERA
DE LA *ESCUELA DE*
ARQUITECTURA
DE MADRID

3-78-05

C U A D E R N O S
D E L I N S T I T U T O
J U A N D E H E R R E R A

NUMERACIÓN

3 Área
78 Autor
05 Ordinal de cuaderno (del autor)

TEMAS

1 ESTRUCTURAS
2 CONSTRUCCIÓN
3 FÍSICA Y MATEMÁTICAS
4 TEORÍA
5 GEOMETRÍA Y DIBUJO
6 PROYECTOS
7 URBANISMO
8 RESTAURACIÓN
0 VARIOS

Movimientos rígidos

Instituto Juan de Herrera
Escuela Técnica Superior de Arquitectura de Madrid
Gestión y portada: Alba Peña Fernández
CUADERNO 458.01 / 3-78-05
ISBN-13: 978-84-9728-541-4
Depósito Legal: M-19077-2015

Este cuadernillo pretende ser una guía de estudio de los conceptos básicos sobre isometrías vectoriales y afines que se imparten en la asignatura Geometría Afín y Proyectiva, del Grado en Fundamentos de la Arquitectura de la E.T.S.A.M. Han sido utilizados como apuntes de clase durante varios cursos y recogen ejemplos y problemas resueltos, algunos de los cuales han aparecido en las hojas de ejercicios del departamento de Matemática Aplicada de la E.T.S.A.M. a lo largo de los años. Mi agradecimiento a los alumnos de la asignatura que utilizando estos apuntes me han ayudado a llevarlos hasta su forma actual.

La notación y conceptos básicos de álgebra lineal pueden encontrarse en los cuadernillos [5] y [6]. Finalizamos con una colección de ejercicios resueltos que amplían el conjunto de ejemplos que se presentan junto con el desarrollo de la materia. Se incluyen demostraciones de algunos resultados, pero recomendamos al lector interesado en la justificación de todos los resultados que se dirija a alguno de los libros enumerados en la bibliografía.

Índice

1

Isometrías vectoriales

Sea E_n el espacio vectorial (real) euclídeo $\mathbb{R}^n$ con el producto escalar usual

$$x \cdot y = \langle x, y \rangle = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n,$$

para todo par de vectores $x = (x_1, \ldots, x_n)$ e $y = (y_1, \ldots, y_n)$ de E_n.

1.1 Matrices ortogonales

Sea I_n la matriz identidad de tamaño $n \times n$.

Definición 1.1.1. *Sea A una matriz cuadrada $n \times n$ con elementos reales. Se dice que A es una* matriz ortogonal *si se verifica $AA^t = I_n$.*

Obsérvese que toda matriz ortogonal es invertible y $\det(A) = \pm 1$ ya que

$$1 = \det(I_n) = \det(AA^t) = \det(A)\det(A^t) = \det(A)^2.$$

Proposición 1.1.2. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *A es una matriz ortogonal.*
2. *$A^t = A^{-1}$.*
3. *Los vectores fila (o columna) de A forman una base ortonormal de E_n.*

Dadas bases B y B' de E_n, denotamos por $P = M(B', B)$ a la matriz de cambio de base de B' a B, que tiene por columnas las coordenadas de los vectores de la base B' en la base B.

Proposición 1.1.3. *Dadas bases ortonormales B y B' de E_n, la matriz $P = M(B', B)$ es ortogonal.*

Ejemplo 1.1.4. *Sea $B = \{e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1)\}$ la base canónica de E_2, que es una base ortonormal. La siguiente también es una base ortonormal de E_2*

$$B' = \left\{ \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} \right), \left(\frac{-1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right\},$$

y la matriz $M(B', B)$ de cambio de base de B' a B es una matriz ortogonal

$$M(B', B) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{-1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix},$$

y por tanto, la matriz $M(B, B')$ de cambio de base de B a B' es igual a

$$M(B, B') = M(B', B)^{-1} = M(B', B)^t = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}.$$

1.2 Definición de isometría vectorial y propiedades

El espacio vectorial euclídeo E_n es un espacio normado con norma

$$|| \cdot || : E_n \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad ||x|| = \sqrt{x \cdot x}, \ \forall x \in E_n.$$

Definición 1.2.1. *Un endomorfismo $f : E_n \longrightarrow E_n$ es una* isometría vectorial *o* endomorfismo ortogonal *si conserva el producto escalar, esto es*

$$f(x) \cdot f(y) = x \cdot y \text{ para todo } x, y \in E_n.$$

Proposición 1.2.2. *Dado un endomorfismo $f : E_n \longrightarrow E_n$, se tiene que f es una isometría vectorial si, y sólo si, conserva la norma, es decir*

$$||f(x)|| = ||x|| \text{ para todo } x \in E_n.$$

Demostración 1. *Si f es una isometría vectorial, $||x||^2 = x \cdot x = f(x) \cdot f(x) = ||f(x)||^2$, lo que demuestra la condición necesaria. Para probar la condición suficiente, dados dos vectores cualesquiera $x, y \in E_n$ se tiene que $||f(x)|| = ||x||$, $||f(y)|| = ||y||$ y $||f(x+y)|| = ||x+y||$. Utilizando que el producto escalar es una forma bilineal simétrica, se verifica*

$$\begin{aligned} ||x+y||^2 =& \langle x+y, x+y\rangle = \langle x, x+y\rangle + \langle y, x+y\rangle = \langle x, x\rangle + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle + \langle y, y\rangle \\ =& ||x||^2 + 2\langle x, y\rangle + ||y||^2, \end{aligned}$$

y análogamente que

$$||f(x+y)||^2 = ||f(x)||^2 + 2\langle f(x), f(y)\rangle + ||f(y)||^2 = ||x||^2 + 2\langle f(x), f(y)\rangle + ||y||^2.$$

Además $||f(x+y)||^2 - ||x+y||^2 = 0$ implica

$$2\langle f(x), f(y)\rangle - 2\langle x, y\rangle = 0$$

lo que demuestra que $\langle f(x), f(y)\rangle = \langle x, y\rangle$.

Dados $x, y \in E_n$, denotamos por $\widehat{(x,y)}$ el ángulo en $[0, \pi]$ que forman los vectores x e y. Como consecuencia de lo anterior, una isometría vectorial también conserva los ángulos entre vectores

$$\cos\widehat{(x,y)} = \frac{x \cdot y}{||x||||y||} = \frac{f(x) \cdot f(y)}{||f(x)||||f(y)||} = \cos\left(\widehat{f(x), f(y)}\right).$$

Ejemplo 1.2.3. *Dado $r \in \mathbb{R}$, la aplicación lineal $h : E_n \longrightarrow E_n$ definida por $h(x) = rx$ es una* homotecia de razón *r. Si $|r| \neq 1$ entonces h no es una isometría*

vectorial ya que $||h(x)|| = ||rx|| = |r|||x|| \neq ||x||$. *Sin embargo,* h *conserva los ángulos entre vectores* $x, y \in E_n$

$$\cos(\widehat{h(x), h(y)}) = \frac{rx \cdot ry}{||rx||||ry||} = \frac{r^2(x \cdot y)}{|r|^2||x||||y||} = \cos(\widehat{x, y}).$$

Denotamos por $M_f(B)$ a la matriz asociada a $f : E_n \longrightarrow E_n$ en la base B de E_n, que tiene por columnas las coordenadas (en la base B) de las imágenes de los vectores de la base B.

Proposición 1.2.4. *Dado un endomorfismo* $f : E_n \longrightarrow E_n$*, se tiene que* f *es una isometría vectorial si, y sólo si, la matriz* $M_f(B)$*, asociada a* f *en una base ortonormal* B *de* E_n*, es una matriz ortogonal.*

Demostración 2. *Dados* $x, y \in E_n$ *arbitratios, sean* X *e* Y *las matrices columna de sus coordenadas en la base* B*. Si* f *es isometría* $x \cdot y = f(x) \cdot f(y)$*, idenatidad que escribimos en forma matricial, siendo* I_n *la matriz del producto escalar y* $A = M_f(B)$*,*

$$\langle x, y \rangle = X^t I_n Y = X^t A^t I_n A Y = X^t A^t A Y = \langle f(x), f(y) \rangle.$$

Como se verifica para cualquier par de vectores, esto implica que $A^t A = I_n$ *y por tanto que* A *es ortogonal. El recíproco es inmediato utilizando la misma expresión matricial.*

Ejemplos 1.2.5. 1. *Sea* $f : E_3 \longrightarrow E_3$ *el endomorfismo definido por*

$$f(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{14}{15}x_1 - \frac{1}{3}x_2 + \frac{2}{15}x_3, -\frac{1}{3}x_1 - \frac{2}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_3, \frac{2}{15}x_1 + \frac{2}{3}x_2 + \frac{11}{15}x_3\right).$$

¿Es f *una isometría vectorial? Obtenemos la matriz asociada a* f *en la base canónica de* E_3*,*

$$A = \begin{pmatrix} \frac{14}{15} & \frac{-1}{3} & \frac{2}{15} \\ \frac{-1}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{15} & \frac{2}{3} & \frac{11}{15} \end{pmatrix}$$

y comprobamos que $AA^t = I_3$. *Como* A *es una matriz ortogonal, podemos afirmar que* f *es una isometría vectorial.*

2. *Un cambio de base entre bases ortonormales* B *y* B' *de* E_n *es una isometría vectorial en* E_n *con matriz asociada* $M(B', B)$ *(ó* $M(B, B')$*), que es una matriz ortogonal.*

Proposición 1.2.6. *Una isometría vectorial* $f : E_n \longrightarrow E_n$ *tiene las siguientes propiedades:*

1. f *es un isomorfismo.*

2. *Si* λ *es valor propio real de* f *entonces* $\lambda = \pm 1$.

3. *Si* 1 *y* -1 *son valores propios de* f*, los subespacios propios asociados* V_1 *y* V_{-1} *son ortogonales.*

Demostración 3.

1. *Sea* $x \in \mathrm{Ker}(f)$*, entonces la imagen de* x *es el vector nulo,* $f(x) = 0$ *y* $||x|| = ||f(x)|| = 0$. *Si* $x \cdot x = 0$ *entonces* $x = 0$*, lo que demuestra que* $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$ *y por tanto que* f *es inyectiva. Un endomorfismo inyectivo es siempre biyectivo, es decir,* f *es un isomorfirsmo.*

2. *Supongamos que* f *tiene un valor propio real* λ *y que* x *es un vector propio no nulo de valor propio* λ. *Por ser* f *isometría* $||x|| = ||f(x)|| = ||\lambda x|| = |\lambda| ||x||$ *y así* $|\lambda| = 1$*, lo que implica* $\lambda = \pm 1$.

3. *Dados* $x \in V_1$ *e* $y \in V_{-1}$*, se tiene que*

$$\langle x, y\rangle = \langle f(x), f(y)\rangle = \langle x, -y\rangle = -\langle x, y\rangle.$$

Por tanto $2\langle x, y\rangle = 0$ *y* x *e* y *son ortogonales* $\forall x \in V_1$, $\forall y \in V_{-1}$*, lo que demuestra que* V_1 *y* V_{-1} *son subespacios ortogonales.*

Definición 1.2.7. *Un subespacio U de E_n es* invariante *mediante la isometría vectorial f si $f(U) = U$.*

En general, un subespacio vectorial U de E_n es invariante mediante una transformación afín $g : E_n \longrightarrow E_n$ si $g(U) \subseteq U$. En el caso particular en que g es una isometría, por ser además un isomorfirmo se tiene que $g(U) = U$. Denotamos por $U^\perp$ al subespacio ortogonal de U en E_n,

$$U^\perp = \{w \in E_n \mid w \cdot u = 0, \forall u \in U\},$$

que verifica $U \oplus U^\perp = E_n$ y por tanto $\dim(U^\perp) = n - \dim(U)$.

Proposición 1.2.8. *Dada una isometría vectorial $f : E_n \longrightarrow E_n$ se verifica:*

1. *Si U es subespacio invariante mediante f entonces $U^\perp$ es también un subespacio invariante por f.*
2. *$U = \langle u \rangle$ es subespacio no nulo invariante mediante f si, y sólo si, u es un vector propio de valor propio ± 1 de f.*

Demostración 4.

1. *Dado $w \in U^\perp$ entonces*

$$0 = w \cdot u = f(w) \cdot f(u), \ \ \forall u \in U.$$

Como $f(U) = U$ entonces $f(w) \in U^\perp$. Así $f(U^\perp) \subseteq U^\perp$ y por ser isomorfirmo $f(U^\perp) = U^\perp$, lo que demuestra que $U^\perp$ es invariante mediante f.

2. *Si U es invariante entonces $f(u) \in \langle u \rangle$. Por ser U no nulo, $f(u) = \lambda u$, con $\lambda \in \mathbb{R}$. De la Proposición 1.2.6, 2 se sigue que u es vector propio de valor propio $\lambda = \pm 1$. El recíproco es inmediato.*

De la proposición anterior se deduce que si $u \in E_n$ es un vector propio de valor propio $\lambda = \pm 1$ de f, entonces $U = \langle u \rangle$ y $U^\perp$ son subespacios invariantes por f.

Definición 1.2.9. *Un vector $x \in E_n$ es un* vector invariante *mediante la isometría vectorial f si $f(x) = x$. El* subespacio de vectores invariantes *de f es*

$$F(f) = \{x \in E \mid f(x) = x\}.$$

Observaciones:

1. $x \in E_n$ es invariante si es un vector propio asociado al valor propio $\lambda = 1$.

2. $F(f) = V_1$ es un subespacio invariante.

3. Fijada una base B de E_n. Si $A = M_f(B)$, los vectores columna de coordenadas X de los vectores de $F(f)$ en la base B satisfacen la ecuación matricial

$$(A - I)X = 0.$$

Ejemplo 1.2.10. *Sea f la isometría vectorial del Ejemplo 1.2.5. Los valores propios de la matriz A son $\lambda_1 = 1$ con multiplicidad 2 y $\lambda_2 = -1$ con multiplicidad 1. Por la Proposición 1.2.8*

$$F(f) = V_1 = \langle(-5, 1, 0), (2, 0, 1)\rangle \text{ y } V_{-1} = \langle\left(\frac{-1}{2}, \frac{-5}{2}, 1\right)\rangle$$

son subespacios invariantes de f y ortogonales entre si.

1.3 Clasificación de isometrías vectoriales

Sea $f : E_n \longrightarrow E_n$ es una isometría vectorial y A la matriz $n \times n$ asociada a f en una base ortonormal B de E_n. Por tanto A es una matriz ortogonal y $\det(A) = \pm 1$.

Definición 1.3.1.

1. *Si* $\det(A) = 1$ *se dice que f es una* isometría vectorial directa.

2. *Si* $\det(A) = -1$ *se dice que f es una* isometría vectorial inversa.

Proposición 1.3.2. *La composición $f_1 \circ f_2$ de dos isometrías vectoriales $f_1, f_2 : E_n \longrightarrow E_n$ es una isometría vectorial. Además, si ambas son directas o inversas entonces $f_1 \circ f_2$ es directa, y en caso contrario es inversa.*

Demostración 5. *Sean A_1 y A_2 son las matrices asociadas a f_1 y f_2 en una base ortonormal B de E_n, entonces $A = A_1A_2$ es la matriz de $f_1 \circ f_2$ en la base B. Se demuestra fácilmente que A es una matriz ortogonal,*

$$AA^t = A_1A_2(A_1A_2)^t = A_1(A_2A_2^t)A_1^t = A_1I_nA_1^t = A_1A_1^t = I_n.$$

Además,

1. *si* $\det(A_1) = \det(A_2) = \pm 1$ *entonces* $\det(A) = \det(A_1)\det(A_2) = 1$,

2. *si* $\det(A_1) \neq \det(A_2)$ *entonces* $\det(A) = -1$.

1.3.1 Isometrías vectoriales en E_2

Clasificamos en esta sección las isometrías vectoriales en el plano. Sea $f : E_2 \longrightarrow E_2$ una isometría vectorial y $B = \{e_1, e_2\}$ una base ortonormal de E_2.

Proposición 1.3.3. *Sea $A = M_f(B)$ la matriz asociada a f en la base B. Si f es directa entonces $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, y si f es inversa entonces $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$ con $a = \cos(\alpha)$ y $b = \operatorname{sen}(\alpha)$ para algún $\alpha \in [0, 2\pi)$.*

Demostración 6. *Por la Proposición 1.1.2, 3 sabemos que los vectores columna de A son una base ortonormal, y así*

$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \text{ ó } A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$$

con $a^2 + b^2 = 1$. Existe entonces $\alpha \in [0, 2\pi)$ tal que $a = \cos(\alpha)$ y $b = \operatorname{sen}(\alpha)$. Observamos que $\det(A) = 1$ *y* $\det(A) = -1$ *respectivamente.*

Así, una isometría vectorial en E_2 es uno de los siguientes casos:

GIROS: Sea $f : E_2 \longrightarrow E_2$ una isometría vectorial directa, $\det(A) = 1$.

1. Para todo $x \in E_2$ se tiene que $\alpha = (\widehat{x, f(x)})$ es constante, $\alpha \in [0, 2\pi)$. Si (x_1, x_2) son las coordenadas de x en la base B entonces $f(x)$ tiene coordenadas

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax_1 + bx_2 \\ -bx_1 + ax_2 \end{pmatrix},$$

   y $\cos(\widehat{x, f(x)})$ es igual a

$$\frac{x \cdot f(x)}{||x||||f(x)||} = \frac{x \cdot f(x)}{||x||^2} = \frac{ax_1^2 + bx_2x_1 - bx_1x_2 + ax_2^2}{x_1^2 + x_2^2} = a = \cos(\alpha).$$

   Diremos que f es un giro de ángulo α.

2. f no tiene valores propios reales, ya que el polinomio característico de A no tiene soluciones reales,

$$\begin{vmatrix} a - \lambda & -b \\ b & a - \lambda \end{vmatrix} = (a - \lambda)^2 + b^2 = \lambda^2 - 2a\lambda + 1 = 0.$$

3. f no tiene vectores invariantes no nulos.

SIMETRÍAS: Sea $f : E_2 \longrightarrow E_2$ una isometría vectorial inversa, $\det(A) = -1$.

1. Los valores propios de f son $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = -1$ con multiplicidad 1, ya que

$$\begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ b & -a - \lambda \end{vmatrix} = (-\lambda)^2 - a^2 - b^2 = \lambda^2 - 1 = 0.$$

2. Existe una base ortonormal $B' = \{u_1, u_2\}$ de vectores propios de f en la que la matriz asociada a f es la matriz diagonal $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

3. El subespacio de vectores invariantes, es el subespacio propio asociado al valor propio $\lambda_1 = 1$, una recta de ecuación $r \equiv (a - 1)x_1 + bx_2 = 0$.

4. $f^2 = id$ es la aplicación identidad ($A^2 = I_2$). f es una simetría de eje la recta r.

Observaciones 1.3.4. *1. La composición de dos rotaciones es una rotación de ángulo la suma de los ángulos.*

2. La composición de dos simetría es una rotación de ángulo el doble del ángulo comprendido entre los dos ejes de simetría.

3. La composición de simetría y rotación es una simetría.

Ejemplo 1.3.5. *En E_2 y con respecto a la base ortonormal estándar*

$$B = \{e_1 = (1,0), e_2 = (0,1)\},$$

obtener las ecuaciones de la simetría vectorial s de eje la recta $r = \langle w_1 \rangle$, con $w_1 = (1,2) = e_1 + 2e_2$.

Dado un vector w_2 ortogonal a w_1 sabemos que

$$s(w_1) = w_1 \text{ y } s(w_2) = -w_2.$$

Tomemos $w_2 = 2e_1 - e_2 = (2,-1)$. Sabemos que las columnas de $M_s(B)$ son las coordenadas de $s(e_1)$ y $s(e_2)$ en la base B. Calculemos $s(e_1)$ y $s(e_2)$,

$$s(e_1) + 2s(e_2) = s(w_1) = w_1 = e_1 + 2e_2,$$
$$2s(e_1) - s(e_2) = s(w_2) = -w_2 = -2e_1 + e_2,$$

de donde

$$s(e_1) = -\frac{3}{5}e_1 + \frac{4}{5}e_2$$
$$s(e_2) = \frac{4}{5}e_1 + \frac{3}{5}e_2.$$

Así

$$M_s(B) = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}.$$

Las ecuaciones de la isometría vectorial son

$$\begin{cases} x' = -\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y, \\ y' = \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y. \end{cases}$$

Podemos resolver el ejercicio utilizando matrices de cambio de base. Tomamos la base ortonormal

$$B' = \left\{ u_1 = \frac{w_1}{\sqrt{5}}, u_2 = \frac{w_2}{\sqrt{5}} \right\},$$

entonces

$$M_s(B') = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad M(B', B) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

y teniendo en cuenta que $M(B, B') = M(B', B)^{-1} = M(B', B)^t$ *obtenemos*

$$M_s(B) = M(B', B) M_s(B') M(B', B)^t.$$

1.3.2 Isometrías vectoriales en E_3

Clasificamos en esta sección las isometrías vectoriales en el espacio. Sea $f : E_3 \longrightarrow E_3$ una isometría vectorial y $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ una base ortonormal de E_3. La matriz $A = M_f(B)$ es una matriz ortogonal y el polinomio característico $\det(A - \lambda I_3)$ de A tiene grado 3 en λ, y por tanto, al menos una raiz real $\lambda = \pm 1$. Se pueden dar los siguientes casos:

1. Si A tiene valor propio $\lambda_1 = 1$,

   (a) con multiplicidad 1 y λ_2, λ_3 complejos. Entonces $\dim(F(f)) = \dim(V_1) = 1$ y f tiene una recta de vectores invariantes.

   (b) con multiplicidad 2, entonces $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ y forzosamente $\lambda_3 = -1$. En este caso $\dim(F(f)) = \dim(V_1) = 2$ y f tiene un plano de vectores invariantes.

(c) con multiplicidad 3, entonces $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$ y A es la matriz identidad. En este caso f es la identidad.

2. Si A no tiene valor propio 1 entonces tiene valor propio $\lambda_1 = -1$ con multiplicidad uno o tres. En el primer caso A tiene valores propios $\lambda_1 = -1$ y λ_2, λ_3 complejos. La isometría f no tiene vectores invariantes.

Teniendo en cuenta lo anterior, se demuestra que existe una base ortonormal $B' = \{u_1, u_2, u_3\}$ de E_3 en la que la matriz $A' = M_f(B')$ es de uno de los siguientes tipos:

1. ($\det(A) = 1$) GIRO de ángulo $\alpha \in [0, 2\pi)$ y eje la recta $V_1 = \langle u_1 \rangle$. Siendo $\Pi = V_1^{\perp} = \langle u_2, u_3 \rangle$ un plano invariante.

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\operatorname{sen}(\alpha) \\ 0 & \operatorname{sen}(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}.$$

2. ($\det(A) = -1$) SIMETRÍA respecto al plano $V_1 = \langle u_1, u_2 \rangle$. Siendo $V_1^{\perp} = \langle u_3 \rangle$ un subespacio invariante.

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

3. ($\det(A) = -1$) COMPOSICIÓN DE GIRO ángulo $\alpha \in [0, 2\pi)$, y eje la recta $V_{-1} = \langle u_1 \rangle$, Y SIMETRÍA respecto al plano $V_{-1}^{\perp} = \langle u_2, u_3 \rangle$. Siendo V_{-1} una recta y $\Pi = V_{-1}^{\perp}$ un plano invariantes.

$$A' = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\operatorname{sen}(\alpha) \\ 0 & \operatorname{sen}(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\operatorname{sen}(\alpha) \\ 0 & \operatorname{sen}(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

Las matrices A y A' son matrices equivalentes y, por lo tanto, tienen los mismos valores propios. Esto implica que:

$$\det(A) = \det(A') \text{ y } \operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(A').$$

Como tienen la misma traza, podemos calcular el ángulo α de un giro (caso 1) utilizando que $\operatorname{tr}(A) = 1 + 2\cos(\alpha)$ y de un giro compuesto con simetría (caso 3) con $\operatorname{tr}(A) = -1 + 2\cos(\alpha)$. Alternativamente, en ambos casos, un vector cualquiera x del plano invariante Π verifica que $\alpha = (\widehat{x, f(x)})$.

Ejemplos 1.3.6. *En la base estándar $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ de E_3, destacamos algunos casos particulares interesantes.*

1. *La matriz de un giro de ángulo $\alpha = 0$ es $A = I_3$. La matriz del giro de eje la recta $\langle e_1 \rangle$ y $\alpha = \pi$ es*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Obsérvese que tiene valores propios 1 con multiplicidad 1 y -1 con multiplicidad 2. Las matrices de los giros de ángulo α y ejes la recta $\langle e_2 \rangle$ y $\langle e_3 \rangle$ son respectivamente

$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & 0 & -\operatorname{sen}(\alpha) \\ 0 & 1 & 0 \\ \operatorname{sen}(\alpha) & 0 & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \; y \; \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\operatorname{sen}(\alpha) & 0 \\ \operatorname{sen}(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. *La matrices de las simetrías con respecto a los planos $\langle e_2, e_3 \rangle$ y $\langle e_1, e_3 \rangle$ son respectivamente*

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \; y \; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. La matriz de la simetría con respecto al plano $\langle e_2, e_3\rangle$ compuesta con el giro de ángulo $\alpha = \pi$ y eje la recta $\langle e_1\rangle$ es

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Obsérvese que tiene valor propio -1 con multiplicidad 3.

2

Movimientos rígidos

Sea $\mathbb{E}_n$ el espacio afín euclídeo $\mathbb{R}^n$ (sobre el espacio vectorial E_n), con la distancia

$$\mathsf{d}(P,Q) = ||\overline{PQ}|| = \sqrt{\langle \overline{PQ}, \overline{PQ} \rangle}, \;\; P, Q \in \mathbb{E}_n.$$

Definición 2.0.7. *Una aplicación afín $f : \mathbb{E}_n \to \mathbb{E}_n$ es una* isometría afín o movimiento rígido *si mantiene las distancia, esto es,*

$$\mathrm{d}(P,Q) = \mathrm{d}(f(P), f(Q)), \;\; \forall P, Q \in \mathbb{E}_n.$$

Sea $\overline{f} : E_n \to E_n$ la aplicación lineal asociada a f.

Proposición 2.0.8. *f es una isometría afín si, y sólo si, $\overline{f}$ es una isometría vectorial.*

Demostración 7. *Sabiendo que los vectores de E_n son de la forma $\overline{PQ}$, $\forall P, Q \in \mathbb{E}_n$, que $\mathrm{d}(P,Q) = ||\overline{PQ}||$ y $\overline{f(P)f(Q)} = \overline{f}(\overline{PQ})$, la equivalencia se obtiene de*

$$\mathrm{d}(P,Q) = ||\overline{PQ}|| \text{ y } ||\overline{f}(\overline{PQ})|| = ||\overline{f(P)f(Q)}|| = \mathrm{d}(f(P), f(Q)).$$

Por lo tanto, mediante una isometría afín f se mantienen además las longitudes y los ángulos. Por otra parte, la composición de movimientos rígidos es un nuevo movimiento rígido y veremos como a partir de unos pocos movimientos básicos se puede obtener un movimiento rígido cualquiera del plano $\mathbb{E}_2$ o del espacio $\mathbb{E}_3$.

Fijado un sistema de referencia ortonormal $\mathcal{R} = \{O; B\}$ de $\mathbb{E}_n$, una isometría afín viene determinada por las ecuaciones

$$Y = AX + b \quad \text{ó} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ X \end{pmatrix}$$

siendo A la matriz ortogonal de la aplicación lineal $\overline{f}$ (el 0 sobre A indica una fila de ceros), b el vector columna de las coordenadas de $f(O)$, X el vector columna de las coordenadas de un punto, e Y el vector columna de las coordenadas de su imagen.

Ejemplo 2.0.9. *La homotecia $h : \mathbb{E}_n \longrightarrow \mathbb{E}_n$ de razón r y centro $C \in \mathbb{E}_n$ es una transformación afín con expresión matricial*

$$\begin{pmatrix} 1 \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & rI_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ X \end{pmatrix}$$

siendo C el único punto fijo de h, $C = h(C) = rC + b$, de donde $b = (1 - r)C$. Una homotecia de rázón $r \neq 1$ no es una isometría afín ya que $\overline{h}$ no es una isometría vectorial, puesto que la matriz $A = rI_n$ no es ortogonal.

Proposición 2.0.10. *Todo movimiento rígido $f : \mathbb{E}_n \longrightarrow \mathbb{E}_n$ es la composición de una traslación con un movimiento rígido que deja fijo el origen. Esto es,*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}.$$

Para clasificar una isometría afín f estudiamos su subespacio de puntos fijos

$$\mathbb{F}(f) = \{P \in \mathbb{E}_n \mid f(P) = P\},$$

que está determinado por la ecuación matricial

$$(A - I)X + b = 0.$$

La isometría afín f tiene puntos fijos si, y sólo si, el sistema $(A-I)X+b=0$ tiene solución, si

$$m = \text{rango}(A-I) = \text{rango}(A-I|b).$$

La dimensión del subespacio de puntos fijos es por tanto $\dim(\mathbb{E}_n) - m = n - m$.

Un subespacio afín L de $\mathbb{E}_n$ es un subespacio invariante mediante f si $f(L) \subseteq L$. Como $L = P + W$, con $P \in \mathbb{E}_n$ y W subespacio vectorial de E_n, tenemos que L es invariante si, y sólo si,

1. $\overline{Pf(P)} \in W$,
2. $\overline{f}(W) \subseteq W$, que por ser $\overline{f}$ isomorfirmo implica $\overline{f}(W) = W$.

Si f no tiene puntos fijos ($\mathbb{F}(f) = \emptyset$) pero $\overline{f}$ tiene vectores invariantes ($F(\overline{f})$ es no nulo) entonces f puede tener subespacios invariantes. Llamamos variedad invariante de f a la que tiene como dirección $F(\overline{f})$, que denotamos por

$$V(f) = P + F(\overline{f}),$$

y se verifica que el vector $\overline{Pf(P)} = AP + b - P = (A-I)P + b$ pertenece a $F(\overline{f})$,

$$0 = (A-I)(\overline{Pf(P)}) = (A-I)((A-I)P+b) = (A-I)^2P + (A-I)b,$$

de donde obtenemos las ecuaciones cartesianas de $V(f)$

$$(A-I)^2X + (A-I)b = 0. \tag{2.1}$$

2.1 Clasificación de los movimientos en el plano

Veremos que los movimientos en el plano $\mathbb{E}_2$ se reducen a los siguientes casos:

$$\det A = 1$$

$\mathsf{rango}(A - I_2)$	$\mathsf{rango}(A - I_2 \mid b)$	Clasificación	Puntos fijos
0	0	Identidad $(b = 0)$	$\mathbb{E}_2$
0	1	Traslación $(b \neq 0)$	No
2	2	Giro	Un punto fijo

El giro es de ángulo α, tal que $\cos(\alpha) = \frac{1}{2}\mathsf{tr}(A)$, y centro el punto fijo.

$\det A = -1$

$\mathsf{rango}(A - I_2)$	$\mathsf{rango}(A - I_2 \mid b)$	Clasificación	Puntos fijos
1	1	Simetría	Una recta
1	2	Simetría deslizante	No

La simetría tiene como eje la recta de puntos fijos. La simetría deslizante se descompone de forma única en una simetría, de eje la recta invariante $r = V(f)$, compuesta con una traslación, de vector paralelo a r (existen otras descomposiciones en las que el eje no es paralelo al vector de traslación).

Demostración 8. *Teniendo en cuenta que*

$$M_f(\mathcal{R}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b_1 & a_{11} & a_{12} \\ b_2 & a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

y la clasificación (en la sección 1.3.1) de las isometrías vectoriales en E_2, obtenemos la clasificación de las isometrías afines en $\mathbb{E}_2$.

1. *Si* $\det(A) = 1$*, por la Proposición 1.3.3, A es la matriz de un giro*

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\mathrm{sen}(\alpha) \\ \mathrm{sen}(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}.$$

Si $\alpha = 0$*,* $A = I_2$ *y*

$$M_f(\mathcal{R}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b_1 & 1 & 0 \\ b_2 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{2.2}$$

Si $(b_1, b_2) = (0, 0)$

$$\text{rango}(A - I_2) = \text{rango}(A - I_2|b) = 0$$

entonces f *es la identidad,* $\mathbb{F}(f) = \mathbb{E}_2$*. Si* $(b_1, b_2) \neq (0, 0)$ *entonces*

$$\text{rango}(A - I_2) = 0 \neq \text{rango}(A - I_2|b) = 1,$$

f *es una traslación de vector* (b_1, b_2)*,* $\mathbb{F}(f) = \emptyset$ *no tiene puntos fijos. Si* $\alpha \neq 0$ *entonces* A *no tiene valor propio* 1 *y*

$$\text{rango}(A - I_2) = \text{rango}(A - I_2|b) = 2,$$

$\dim(\mathbb{F}(f)) = 0$*,* f *tiene un punto fijo* P*, es un giro de ángulo* α *y centro* P*. En la referencia* $\mathcal{R}' = \{P; B\}$

$$M_f(\mathcal{R}') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\text{sen}(\alpha) \\ 0 & \text{sen}(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}. \tag{2.3}$$

2. *Si* $\det(A) = -1$*, existe una base ortonormal* B' *de* E_2 *en la que*

$$A' = M_{\overline{f}}(B') = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Por ser A *y* A' *matrices equivalentes* $\text{rango}(A - I_2) = \text{rango}(A' - I_2) = 1$*. Si* $\text{rango}(A - I_2) = \text{rango}(A - I_2|b) = 1$ *entonces* $\mathbb{F}(f)$ *tiene dimensión* 1*, es una recta de puntos fijos y* f *es la simetría con respecto a dicha recta. Tomando*

un punto fijo $P \in \mathbb{F}(f)$, *en el sistema de referencia* $\mathcal{R}' = \{P; B'\}$ *se tiene que*

$$M_f(\mathcal{R}') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{2.4}$$

Si $\text{rango}(A - I_2) = 1 \neq \text{rango}(A - I_2|b) = 2$ *entonces* f *no tiene puntos fijos. La variedad invariante de* f *es la recta*

$$r = V(f) = P + V_1$$

con ecuación (2.1)*, ya que* $\text{rango}((A' - I)^2) = \text{rango}((A' - I)^2|(A' - I)b) = 1$. *Como* $v = \overline{Pf(P)} \in V_1$*, en la referencia* $\mathcal{R}' = \{P; B'\}$*,*

$$M_f(\mathcal{R}') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \gamma & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \gamma & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

f *es la composición de una simetría con respecto a la recta invariante* r *y una traslación de vector* v *paralelo a* r.

Para determinar movimientos rígidos en $\mathbb{E}_2$ utilizaremos las matrices (2.2), (2.6) y (2.4) junto con cambios de sistema de referecia entre $\mathcal{R}$ y $\mathcal{R}'$ apropiados, como se muestra en los siguientes ejemplos.

Ejemplos 2.1.1. *En la referencia ortonormal estándar* $\mathcal{R} = \{O; B\}$ *de* $\mathbb{E}_2$ *se pide.*

1. *Hallar la expresión matricial del giro de centro* $P = (1, 1)$ *y álgulo* $\Pi/2$.

   El giro g *de ángulo* $\alpha = \Pi/2$ *y centro* P *en la referencia* $\mathcal{R}' = \{P; B\}$ *tiene matriz asociada*

$$M_g(\mathcal{R}') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\text{sen}(\alpha) \\ 0 & \text{sen}(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.5}$$

En la referencia $\mathcal{R} = \{O; B\}$

$$M_g(\mathcal{R}) = M(\mathcal{R}', \mathcal{R}) M_g(\mathcal{R}') M(\mathcal{R}, \mathcal{R}') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

siendo la matriz de cambio de referencia de $\mathcal{R}'$ *a* $\mathcal{R}$

$$M(\mathcal{R}', \mathcal{R}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

una traslación de vector $\overline{OP} = (1, 1)$. *Alternativamente podemos hallar el transformado del origen* $O = P - \overline{OP}$

$$g(O) = g(P) - \overline{g}(\overline{OP}) = (1, 1) - (-1, 1) = (2, 0).$$

La expresión matricial del giro es:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}$$

2. *Determinar las ecuaciones de la simetría respecto a la recta* $y = x$.

   La recta contiene al origen $O = (0, 0)$, *tiene vector director* $u_1 = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ *y normal* $u_2 = (-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$. *En la referencia* $\mathcal{R}' = \{O; B' = \{u_1, u_2\}\}$ *la simetría* s *tiene matriz asociada*

$$M_s(\mathcal{R}') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{2.6}$$

   En la referencia $\mathcal{R} = \{O; B\}$

$$M_s(\mathcal{R}) = M(\mathcal{R}', \mathcal{R}) M_s(\mathcal{R}') M(\mathcal{R}, \mathcal{R}') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

siendo la matriz de cambio de referencia de $\mathcal{R}'$ a $\mathcal{R}$

$$M(\mathcal{R}',\mathcal{R}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

un giro de ángulo $\pi/4$ con centro el origen. Las ecuaciones de la simetría son

$$\begin{cases} x' = y, \\ y' = x. \end{cases}$$

2.2 Clasificación de los movimientos en el espacio

Los movimientos en el espacio $\mathbb{E}_3$ se reducen a los siguientes casos:

$\det A = 1$

$\mathsf{rango}(A - I)$	$\mathsf{rango}(A - I \mid b)$	Clasificación	Puntos fijos
0	0	Identidad $(b = 0)$	$\mathbb{E}_3$
0	1	Traslación $(b \neq 0)$	No
2	2	Giro	Una recta
2	3	Movimiento Helicoidal	No

El giro es de ángulo α, tal que $\cos(\alpha) = \frac{1}{2}(\mathsf{tr}(A) - 1)$, y eje la recta de puntos fijos. El movimiento helicoidal es la composición de un giro, de álgulo α y eje la recta invariante $V(f)$, con una traslación, de vector paralelo al eje de giro (existen otras descomposiciones en las que el eje no es paralelo al vector de traslación).

$\det A = -1$

$\mathsf{rango}(A - I)$	$\mathsf{rango}(A - I \mid b)$	Clasificación	Puntos fijos
1	1	Simetría	Un plano
1	2	Simetría Deslizante	No
3	3	Simetría Rotatoria	Un punto

La simetría es con respecto al plano de puntos fijos. La simetría deslizante tiene un plano invariante $\Pi = V(f)$ y se puede descomponer como una simetría con respecto a Π compuesta con una traslación de vector paralelo a Π. La simetría rotatoria es la composición de una simetría con respecto al plano invariante Π y una rotación de ángulo α, tal que $\cos(\alpha) = \frac{1}{2}(\mathsf{tr}(A)+1)$, y eje la recta invariante r, de forma que Π y r son ortogonales y la intersección es el punto fijo.

Demostración 9. *Teniendo en cuenta que*

$$M_f(\mathcal{R}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

y la clasificación (en la sección 1.3.2) de las isometrías vectoriales en E_3, obtenemos la clasificación de las isometrías afines en $\mathbb{E}_3$.

1. *Si* $\det(A) = 1$, *existe una base ortonormal B' de E_3 en la que*

$$A' = M_{\overline{f}}(B') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\mathrm{sen}(\alpha) \\ 0 & \mathrm{sen}(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}.$$

Si $\alpha = 0$, *$A' = I_3$ y, para $\mathcal{R}' = \{O; B'\}$*

$$M_f(\mathcal{R}') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & 1 & 0 & 0 \\ b_2 & 0 & 1 & 0 \\ b_3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{2.7}$$

Si $(b_1, b_2, b_3) = (0, 0, 0)$, $\mathrm{rango}(A' - I_3) = \mathrm{rango}(A' - I_3|b) = 0$ entonces $\mathbb{F}(f) = \mathbb{E}_3$, f es la identidad, por tanto

$$\mathrm{rango}(A - I_3) = \mathrm{rango}(A - I_3|b) = 0$$

Si $(b_1, b_2, b_3) \neq (0,0,0)$, $\text{rango}(A' - I_3) = 0 \neq \text{rango}(A' - I_3|b) = 1$, f *es una traslación de vector* (b_1, b_2, b_3), $\mathbb{F}(f) = \emptyset$ *no tiene puntos fijos, por tanto*

$$\text{rango}(A - I_3) = \text{rango}(A' - I_3) = 0 \neq \text{rango}(A - I_3|b) = 1.$$

Si $\alpha \neq 0$ *entonces* $\text{rango}(A - I_3) = \text{rango}(A' - I_3) = 2$ *ya que* $\dim(V_1) = 1$. *Si*

$$\text{rango}(A - I_3) = \text{rango}(A - I_3|b) = 2,$$

$\dim(\mathbb{F}(f)) = 1$, f *tiene una recta de puntos fijos* $r = P + V_1$, *es un giro de eje* r. *En la referencia* $\mathcal{R}' = \{P; B'\}$

$$M_f(\mathcal{R}') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\alpha) & -\text{sen}(\alpha) \\ 0 & 0 & \text{sen}(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}. \tag{2.8}$$

En caso contrario,

$$\text{rango}(A - I_3) = 2 \neq \text{rango}(A - I_3|b) = 3.$$

$\mathbb{F}(f) = \emptyset$, f *no tiene puntos fijos. La variedad invariante de* f *es la recta*

$$r = V(f) = P + V_1,$$

con ecuación (2.1), *ya que* $\text{rango}((A' - I_3)^2) = \text{rango}((A' - I_3)^2|(A' - I_3)b) = 2$. *Como* $v = \overline{Pf(P)} \in V_1$, *en la referencia* $\mathcal{R}' = \{P; B'\}$

$$M_f(\mathcal{R}') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \gamma & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\alpha) & -\text{sen}(\alpha) \\ 0 & 0 & \text{sen}(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix},$$

f *es la composición de un giro de ángulo* α *y eje la recta* r *con una traslación de vector* v *paralelo a* r.

2. *Si* $\det(A) = -1$, si V_1 es no nulo, *existe una base ortonormal* B' *de* E_3 *en la que*

$$A' = M_{\overline{f}}(B') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Si tiene puntos fijos, $\mathbb{F}(f)$ *tiene dimensión* 2, *es un plano de puntos fijos, por tanto*

$$\text{rango}(A - I_3) = \text{rango}(A - I_3|b) = 1,$$

y f *es la simetría con respecto a dicho plano. Tomando un punto fijo* $P \in \mathbb{F}(f)$, *en el sistema de referencia* $\mathcal{R}' = \{P; B'\}$ *se tiene que*

$$M_f(\mathcal{R}') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{2.9}$$

Si f *no tiene puntos fijos,*

$$\text{rango}(A - I_3) = 1 \neq \text{rango}(A - I_3|b) = 2.$$

La variedad invariante de f *es el plano*

$$\Pi = V(f) = P + V_1$$

con ecuación (2.1), *ya que* $\text{rango}((A' - I_3)^2) = \text{rango}((A' - I_3)^2|(A' - I_3)b) = 1$. *Como* $v = \overline{Pf(P)} \in V_1$, *en la referencia* $\mathcal{R}' = \{P; B'\}$,

$$M_f(\mathcal{R}') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \gamma_1 & 1 & 0 & 0 \\ \gamma_2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

f es la composición de una simetría con respecto al plano invariante Π y una traslación de vector v paralelo a Π.

Si V_1 es nulo*, existe una base ortonormal B' de E_3 en la que*

$$A' = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\text{sen}(\alpha) \\ 0 & \text{sen}(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix},$$

y $\text{rango}(A' - I_3) = \text{rango}(A' - I_3|b) = 3$*, entonces f tiene un punto fijo P, por tanto*

$$\text{rango}(A - I_3) = \text{rango}(A - I_3|b) = 3.$$

En la referencia $\mathcal{R}' = \{P; B'\}$,

$$M_f(\mathcal{R}') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\alpha) & -\text{sen}(\alpha) \\ 0 & 0 & \text{sen}(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}. \tag{2.10}$$

f es la composición de una simetría y un giro, que tiene como subespacios invariantes el plano $\Pi = P + V_{-1}^{\perp}$ de la simetría y la recta ortogonal $r = P + V_{-1}$ eje del giro.

Para determinar movimientos rígidos en $\mathbb{E}_2$ utilizaremos las matrices (2.7), (2.8), (2.9) y (2.10) junto con cambios de sistema de referecia entre $\mathcal{R}$ y $\mathcal{R}'$ apropiados, como se muestra en los siguientes ejemplos.

Ejemplo 2.2.1. *Describimos la trayectoria de un punto del eje x mediante un movimiento helicoidal de álgulo α alrededor del eje z y con vector de traslación*

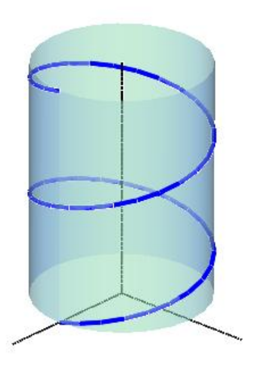


Figura 1: Hélice

$(\alpha, 0, 0)$. *La matriz del movimiento es*

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\text{sen}(\alpha) & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & \text{sen}(\alpha) & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Un punto del eje x *tiene coordenadas* $(u, 0, 0)$, *el resultado de mover el punto viene dado por el producto*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\text{sen}(\alpha) & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & \text{sen}(\alpha) & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ u \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ u\cos(\alpha) \\ u\text{sen}(\alpha) \\ \alpha \end{pmatrix}.$$

El resultado es la parametrizción de una hélice, véase la figura 1.

3

Ejercicios resueltos

1. Determinar si los siguientes triángulos son congruentes, existe una isometría que transforma uno en otro, y en caso afirmativo clasificar dicho movimiento.

$$T_1 = [[0, 0], [3, 4], [3, 1]],$$
$$T_2 = [[1, -1], [4, -5], [4, -2]],$$
$$T_3 = [[-4, -1], [-1, -3], [-1, -2]],$$
$$T_4 = [[0, 0], [-4, 3], [-1, 3]].$$

Solución:

(a) Vemos fácilmente que T_3 no es congruente con ninguno de los demás, pues sus lados no tiene la misma longitud.

(b) El movimiento rígido que lleva T_1 en T_4 es directo, no cambia la orientación. Es el giro de centro el origen y ángulo $\pi/2$, de ecuaciones

$$\begin{cases} x' = -y, \\ y' = x. \end{cases}$$

(c) El movimiento rígido que lleva T_1 en T_2 es inverso, cambia la orientación. Es una simetría deslizante con respecto al eje x, con vector de traslación

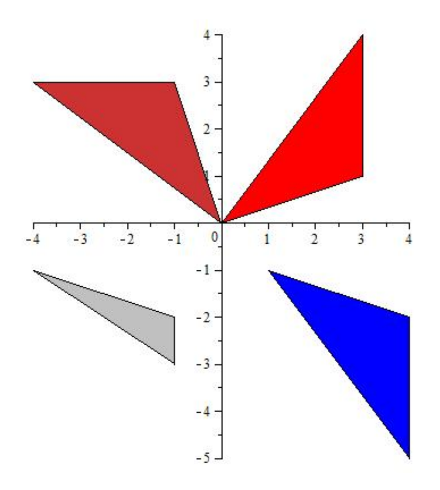


Figura 2: Triángulos T_1, T_2, T_3 y T_4

$(1, -1)$. Las ecuaciones del movimiento son

$$\begin{cases} x' = 1 + x, \\ y' = -1 - y. \end{cases}$$

2. En $\mathbb{E}_3$ y respecto de una referencia ortonormal $\mathcal{R}$, sea f la transformación afín definida por

$$f(x, y, z) = (3 - 2x, 2 - 2y, 1 - 2z)$$

y h la homotecia de centro $C = (1, 0, -1)$ y razón $r = -1/2$.

(a) Hallar la expresión matricial de f. ¿Tiene f puntos fijos? ¿Es una isometría? ¿Qué tipo de transformación es?

(b) Calcular $g = h \circ f$. ¿Es g una isometría? ¿De qué tipo?

(c) Determinar el conjunto de puntos fijos de g y sus subespacios invariantes.

<u>Solución:</u>

(a) La expresión matricial de f es

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Es una homotecia de razón $r = -2$ y centro C su único punto fijo. Por el ejemplo 2.0.9 sabemos que no es una isometría y que, $f(C) = rC + b$, en este caso $b = (3, 2, 1)$ entonces

$$C = \frac{-b}{r-1} = \left(1, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right).$$

(b) Las matrices asociadas a h y $h \circ f$ son

$$M_h(\mathcal{R}') = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ (1-r)C & rI_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1}{2} & 0 \\ \frac{-3}{2} & 0 & 0 & \frac{-1}{2} \end{pmatrix}$$

$$M_{h \circ f}(\mathcal{R}) = M_h(\mathcal{R}) M_f(\mathcal{R}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

g es una traslación de vector $v = (0, -1, -2)$.

(c) g no tiene puntos fijos. Son subespacios invariantes por g las rectas con vector director v y los planos que contienen a v en su dirección.

3. En $\mathbb{E}_3$ y fijada la referencia ortonormal $\mathcal{R} = \{O, \{e_1, e_2, e_3\}\}$, se consideran

una isometría f y una recta r de ecuaciones:

$$f \equiv \begin{cases} x' = y \\ y' = x \\ z' = -z-2 \end{cases}, \quad r \equiv \begin{cases} x = \alpha \\ y = \alpha \\ z = -1 \end{cases}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

(a) Clasificar f obteniendo sus elementos notables (plano de simetría, eje de giro, ángulo de giro según corresponda).

(b) Determinar las ecuaciones de la simetría s respecto del plano Π ortogonal a la recta r y que pasa por el punto P de coordenadas $(-1, 0, 13)$.

(c) Obtener las ecuaciones de la composición $h = s \circ f$. Clasificar h y describir sus subespacios invariantes.

(d) Describir la transformada respecto a f y respecto a h de la recta r' paralela a r y que pasa por el punto Q de coordenadas $(2, 0, 1)$.

Solución:

(a) La matriz asociada a f en la referencia $\mathcal{R}$ es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Como $\text{rango}(A - I_3) = \text{rango}(A - I_3|b) = 2$, f es el giro de eje la recta de puntos fijos, que resulta ser r ya que de

$$(A-I)X + b = 0 \text{ tenemos las ecuadiones de } \mathbb{F}(f) \equiv \begin{cases} x = y \\ z = -1 \end{cases}$$

y ángulo $\alpha = 180°$ ya que $1 + 2\cos(\alpha) = \text{tr}(A) = -1$. También se dice que f es una simetría respecto de la recta r.

(b) El plano $\Pi = P + \langle u_1, u_2 \rangle$, siendo $\{u_1, u_2\}$ una base del subespacio ortogonal al vector director $u_3 = e_1 + e_2$ de la recta r. Tomemos por ejemplo, $u_1 = -e_1 + e_2$ y $u_2 = e_3$. Sabemos entonces que

$$\overline{s}(u_1) = u_1 \Rightarrow -\overline{s}(e_1) + \overline{s}(e_2) = -e_1 + e_2,$$

$$\overline{s}(u_2) = u_2 \Rightarrow \overline{s}(e_3) = e_3,$$

$$\overline{s}(u_3) = -u_3 \Rightarrow \overline{s}(e_1) + \overline{s}(e_2) = -e_1 - e_2,$$

de donde

$$\overline{s}(e_1) = -e_2, \;\; \overline{s}(e_2) = -e_1, \;\; \overline{s}(e_3) = e_3.$$

Por otra parte $P = O + \overline{OP}$ implica $s(O) = s(P) - \overline{s}(\overline{OP})$, esto es

$$s(O) = P - \overline{s}(-e_1 + 13e_3) = P + \overline{s}(e_1) - 13\overline{s}(e_3) = P - e_2 - 13e_3$$

por lo que las coordenadas de $s(O)$ son $(-1, -1, 0)$. Así

$$M_s(\mathcal{R}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Las ecuaciones de s son

$$\begin{cases} x' = -y - 1 \\ y' = -x - 1 \\ z' = z \end{cases}.$$

(c) La matriz asociada a h es

$$M_h(R) = M_s(\mathcal{R}) M_f(\mathcal{R}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Las ecuaciones de h son

$$\begin{cases} x' = -x - 1 \\ y' = -y - 1 \\ z' = -z - 2 \end{cases}.$$

h es la composición del giro f con la simetría s. Los subespacios invariantes de h son: El punto C intersección de la recta r con el plano Π. Todas las rectas que contienen a C. Todos los planos que contienen a C.

(d) La transformada de r' por f es la recta $f(r')$ paralela a r y que pasa por el punto $f(Q)$ de coordenadas $(0, 2, -3)$. La transformada de r' respecto a h es $s(f(r')) = f(r')$ ya que s es la simetría respecto a un plano ortogonal a $f(r')$.

4. En $\mathbb{E}_3$ fijada una referencia ortonormal $\mathcal{R} = \{O, \{e_1, e_2, e_3\}\}$, se considera una isometría afín f, cuyas ecuaciones respecto a $\mathcal{R}$ son:

$$\begin{cases} x' = \frac{5}{3} + \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}z \\ y' = \frac{-10}{3} + \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}z \\ z' = \frac{5}{3} - \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z \end{cases}$$

Se pide:

(a) Hallar el subespacio de puntos fijos de f y clasificar f.

(b) Determinar las ecuaciones de la homotecia h de centro el punto $C = (5, 2, 4)$ y razón $r = \frac{1}{2}$.

(c) Determinar la expresión matricial de la transformación afín g que verifica $h = g \circ f$. ¿Es g una isometría? Justifica tu respuesta.

Solución:

(a) El subespacio de puntos fijos es el plano Π de ecuación cartesiana $-x + 2y - z + 5 = 0$. La isometría f es una simetría respecto al plano Π.

(b) La homotecia h tiene expresión matricial

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{5}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 2 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

(c) Teniendo en cuenta que $g = h \circ f^{-1}$ y que $f^{-1} = f$ (ya que $f^2 = id$ por ser simetría) obtenemos la expresión matricial de g

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{10}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{-1}{6} \\ \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{-1}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{17}{6} & \frac{-1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

El determinante de la matriz $A = M_{\overline{g}}(B) = M_{\overline{h}}(B)M_{\overline{f}}(B)$ es igual a

$$\det(M_{\overline{h}}(B))\det(M_{\overline{f}}(B)) = \frac{1}{8} \cdot (-1) = -\frac{1}{8}.$$

Por lo tanto A no es una matriz ortogonal y g no es una isometría afín.

5. Determinar y clasificar la isometría afín que lleva la referecia ortonormal

$$\mathcal{R}' = \left\{(1,1,1); \left\{u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0), u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0), u_3 = (0,0,1)\right\}\right\}$$

de $\mathbb{E}_3$ en la referencia estándar $\mathcal{R} = \{O; B = \{e_1, e_2, e_3\}\}$.

Solución:

La isometría f viene dada por la matriz de cambio de sistema de referencia de $\mathcal{R}'$ a $\mathcal{R}$, que es igual a

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ya que rango$(A-I) = 1$ y rango$(A-I|b) = 2$, tenemos una simetría deslizante. El plano invariante Π tiene ecuación $-\sqrt{2}x+2y+y\sqrt{2}-1$, dada por el sistema $(A-I)^2X + (A-I)b = 0$. Dado el punto $P = (1/2, 1/2, 0)$ del plano Π, el vector de traslación es $v = \overline{Pf(P)} = ((1/2)\sqrt{2} + 1/2, 1/2, 1)$.

Bibliografía

[1] J. de Burgos, *Álgebra Lineal y Geometría Cartesiana*. McGraw-Hill, 1999.

[2] M. Castellet, I. Llerena, *Álgebra Lineal y Geometría*. Ed. Reverté, 1994.

[3] E. Hernández Rodríguez, M.J. Vázquez Gallo, M.A. Zurro Moro. *Álgebra Lineal y Geometría*. Ed. Pearson, 2012.

[4] L. Merino, E. Santos Aláez. *Álgebra Lineal con Métodos Elementales*. Ed. Paraninfo, 2010.

[5] S.L. Rueda. Álgebra Lineal I. Espacios Vectoriales. Instituto Juan de Herrera. ETS Arquitectura, UPM. Cuaderno 269.01/3-78-01, 2009.

[6] S.L. Rueda. Álgebra Lineal II. Aplicaciones Lineales. Instituto Juan de Herrera. ETS Arquitectura, UPM. Cuaderno 270.01/3-78-02, 2009.

CUADERNO



Cuadernos.ijh@gmail.com
info@mairea-libros.com

